$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & |0 \\ 0 & 0 & -2 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & |0 \\ 0 & 2 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & |0 \\ 0 & 1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |0 \end{pmatrix}$$

entonces $dim\ R_A = 3 = \rho(A)$.

Vamos a encontrar la nulidad de A. El kernel de A es $x = y = z = 0$, por tanto $\nu(A) = 0$ y entonces $\rho(A) + \nu(A) = 3 + 0 = 3$

Ejercicio 4

1. Encuentra el rango y la nulidad de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

2. Encuentra una base para la imagen y el espacio nulo de las matrices anteriores.

4.6. Matriz de transición. Cambio de bases

En la sección anterior se manejó que un espacio vectorial podía tener muchas bases, y que por lo tanto cualquier vector del espacio vectorial podía tener coordenadas en cada una de ellas. Sin embargo, surge la pregunta: ¿se podrá cambiar de base fácilmente?

En la presente sección se dará respuesta a esta pregunta a través de una matriz especial.

Consideremos un ejemplo en R^2.

Sean $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ la base canónica (B_1) para R^2 ; y sean $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 2)$ vectores de R^2. Consideremos una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ igual a cero.

$a(1, 3) + b(-1, 2) = 0$ entonces $a - b = 0$, $3a + 2b = 0$ de donde $a = b = 0$ y por tanto son linealmente independientes y forman otra base $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para R^2.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en R^2, por lo tanto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}$ en términos de la base canónica (B_1) y para hacer hincapié en este hecho se escribe $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Como B_2 es otra base de R^2, existen escalares c_1 y c_2 tales que

$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ y por lo tanto se escribe $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Para encontrar los escalares c_1 y c_2 vamos a proceder de la siguiente manera:

✓ Se escriben los elementos de la base B_1 en términos de la base B_2.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ entonces,

$\left.\begin{matrix} a_1 - b_1 = 1 \\ 3a_1 + 2b_1 = 0 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} a_2 - b_2 = 0 \\ 3a_2 + 2b_2 = 1 \end{matrix}\right\}$ de estos obtenemos:

$a_1 = 2/5$; $b_1 = -3/5$; $a_2 = 1/5$; $b_2 = 1/5$

por lo tanto: $\boldsymbol{i} = (2/5)\mathbf{v}_1 - (3/5)\mathbf{v}_2$ $\boldsymbol{j} = (1/5)\mathbf{v}_1 + (1/5)\mathbf{v}_2$

✓ Después se escribe el vector sustituyendo las nuevas coordenadas:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} = x_1[(2/5)\mathbf{v}_1 - (3/5)\mathbf{v}_2] + x_2[(1/5)\mathbf{v}_1 + (1/5)\mathbf{v}_2]$$

$$= [(2/5)\,x_1 + (1/5)\,x_2]\,\mathbf{v}_1 + [-(3/5)\,x_1 + (1/5)\,x_2)]\,\mathbf{v}_2$$

de donde $c_1 = [(2/5)\,x_1 + (1/5)\,x_2]$ y $c_2 = [-(3/5)\,x_1 + (1/5)\,x_2]$.

✓ Por último formamos una matriz cuyas columnas sean las coordenadas de los vectores de la primera base en términos de la segunda.

Por tanto tenemos que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2/5)x_1 + (1/5)x_2 \\ (-3/5)x_1 + (1/5)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A continuación daremos la definición para esta matriz.

Definición 4.7 A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B_1 en términos de la base B_2 se llama **matriz de transición** de la base B_1 a la base B_2.

Para obtener las coordenadas de cualquier vector en esta nueva base B_2, basta multiplicar la matriz de transición por las coordenadas del vector en la base B_1.

Ejemplo 14

a) Consideremos el vector $\mathbf{x} = (3, -4)$, entonces las coordenadas en la base B_2 del ejemplo anterior serán:

$(\mathbf{x})_{B2} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -13/5 \end{pmatrix}$ para verificarlo tenemos que

$(2/5)\mathbf{v}_1 - (13/5)\mathbf{v}_2 = 2/5(1, 3) - 13/5(-1, 2) = (3, -4)$

Los siguientes teoremas nos indican formalmente el procedimiento realizado anteriormente que nos permitirá cambiar de una base a otra.

Teorema 4.11 Sean B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo $\mathbf{x}$ en V tenemos:

$$(\mathbf{x})_{B2} = A(\mathbf{x})_{B1}$$

Teorema 4.12 Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

Este teorema hace que sea sencillo encontrar la matriz de transición a partir de una base canónica en R^n a cualquier otra base de R^n.

Ejemplo 15

Encontrar la matriz de transición de la base canónica de R^3 a la base B_2 $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Para ello escribiremos la matriz C cuyas columnas son los vectores de B_2. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ esta matriz es la de transición de la base B_2 a la base canónica, ya que los vectores de la base B_2 se encuentran expresados en términos de la base canónica. Entonces, por el teorema anterior, la matriz C^{-1} será la matriz que estamos buscando. Es fácil verificar

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2/8 & 6/8 & 3/8 \\ 2/8 & -2/8 & -1/8 \\ 2/8 & 6/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

Si $(\mathbf{x})_{B1} = (1, -2, 4)$, entonces $(\mathbf{x})_{B2} = \begin{pmatrix} 2/8 & 6/8 & 3/8 \\ 2/8 & -2/8 & -1/8 \\ 2/8 & 6/8 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}$

de donde $1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7/4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5

1. Encuentra la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Escribe (x, y, z) de R^3 en términos de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$